

Radau 型の求積法を時間方向に採用した
一般化速度型 Space-Time 有限要素法による弾塑性解析
Elasto-plastic analysis with generalized velocity-based Space-Time
Finite Element Method employing Radau-type quadrature method

○清水 紫媛^{*}, シャルマ ヴィカス^{*}, 藤澤 和謙^{*}, 竹中 一真^{*}
Shion SHIMIZU, Vikas SHARMA, Kazunori FUJISAWA, Kazuma TAKENAKA

1. はじめに

ため池を含む農業水利施設に対し、大規模地震を想定した耐震性能の評価が進行中である。大きな地震動が入力される応答解析では、材料非線形性を考慮し、残留する塑性変形量を評価する。ここで数値計算により評価される塑性変形量は、波動解析に不可避な波の位相誤差や振幅誤差といった、数値誤差の影響を強く受ける。さらに弾塑性動的解析では、材料特性も時間変化する変数となり、線形弾性を仮定した解析とは異なる誤差特性が予想される。従ってロバストかつ正確な性能評価には、これらの誤差を小さく抑えた解析手法が求められる。本論ではこれを実現する手法の一つである、一般化速度型 ST/FEM(以下 gv-ST/FEM) を弾塑性動的応答解析に拡張する。Radau 型の求積法を時間方向に採用し、一次元弾塑性動的応答解析を行った。

2. 一般化速度型 Space-Time 有限要素法による定式化と Radau 型求積

体積力を無視した運動方程式を支配方程式とする。gv-ST/FEM はこれを時空間 $Q_n := \Omega \times I_n$ (Ω は空間領域, $I_n := (t_n, t_{n+1})$ は時間領域) 上でこれを積分し、以下の弱形式からなる残差式 (ρ : 密度, v : 速度, σ : Cauchy 応力) を得る。

$$R := \int_{Q_n} \delta v \cdot \rho \frac{\partial v}{\partial t} dQ + \int_{\Omega} \delta v \cdot \rho [[v]] d\Omega + \int_{Q_n} \frac{\partial \delta v}{\partial x} \cdot \sigma dQ - \int_P \delta v \cdot h dP = 0 \quad (1)$$

ここで δv は仮想速度, $[[v]]$ は時間ステップ間で生じる速度の不連続量である。また h はトラクションであり、時空間上のノイマン境界 P に作用する。式 (1) を FEM による離散化し、Newton-Raphson 法を適用すると以下の反復アルゴリズムを得る。

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\mathbf{V}^{(k-1)}) \cdot \Delta \mathbf{V}^{(k)} &= -\mathbf{R}^{(k-1)} = -\mathbf{M}\mathbf{V}^{(k-1)} - \mathbf{F}_{\text{int}}(\boldsymbol{\Sigma}^{(k-1)}) + \mathbf{F}_{\text{ext}} \\ \mathbf{V}^{(k)} &= \mathbf{V}^{(k-1)} + \Delta \mathbf{V}^{(k)}; \Delta \mathbf{U}^{h(k)}(t) = \int_{t_n}^t \mathbf{V}^{(k)} dt \end{aligned} \quad (2)$$

ここで k は反復回数, \mathbf{K} は接線剛性マトリックス, $\Delta \mathbf{V}$ は速度増分ベクトルである。 \mathbf{R} は式 (1) に相当する残差ベクトルであり、質量マトリックス \mathbf{M} と節点速度ベクトル \mathbf{V} , 内力 \mathbf{F}_{int} 及び外力ベクトル \mathbf{F}_{ext} からなる。内力ベクトルを構成する $\boldsymbol{\Sigma}$ は、数値積分点における応力値であり、Return-Mapping 法を通して反復毎に降伏局面上に戻される。その際、時刻 t での弾性予測値 $\boldsymbol{\Sigma}^{\text{pre}}$ は、速度の厳密な時間積分により得られる変位増分ベクトル $\Delta \mathbf{U}^h(t)$ を用いて次式で計算される。

$$\boldsymbol{\Sigma}^{\text{pre}}(t) = \boldsymbol{\Sigma}_{t_n} + E \frac{\partial \Delta \mathbf{U}^h(t)}{\partial x} \quad (3)$$

ここで $\boldsymbol{\Sigma}_{t_n}$ は前時間ステップ終了時の応力値, E はヤング率, また時間ステップ終了時刻 t_{n+1} でのつり合いを保証するため, gv-ST/FEM による弾塑性解析では、時間方向に Radau 型求積と呼ばれる端点を含む数値積分法を使用する。具体的には 2 点右 Radau 積分 (局所座標の積分点は $-1/3, +1$) を採用した。

^{*} 京都大学農学研究科 Graduate School of Agriculture, Kyoto University
Keywords: 有限要素法, 動的応答解析, 弾塑性モデル

3. 線形ひずみ硬化体に対する弾塑性動的応答問題

線形ひずみ硬化体からなる一次元梁の動的応答解析を行った．長さ 50 m を，500 の線形空間要素数で表現し，左端を固定，右端に 0.005 秒間，1 MPa の圧縮力を与えた． $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$ ， $E = 10 \text{ MPa}$ ，初期降伏応力は 900 kPa とした．

図 1 は塑性係数 $K = 1.0 \text{ GPa}$ とした際の結果である．従来法 (FEM と Newmark- β 法) でも解析を行い，異なる時間ステップ幅 Δt による数値解で比較する．図より gv-ST/FEM は数値振動が Newmark- β 法に比べ非常に少なく，どの Δt を用いた時でも同様な波形を示し，安定的な計算が実現されている．さらに相当塑性ひずみは Newmark- β 法の結果が Δt に依存して大きく変化し，最大塑性ひずみや，塑性ひずみが確認される範囲の増大が確認できる．その一方 gv-ST/FEM ではどの時間ステップ幅を用いた場合にも厳密解とよく一致し，塑性変形量が高精度に評価されている．

次に塑性係数 K を 1.0 GPa, 100 MPa, 10 MPa, 0.0 Pa とした際の gv-ST/FEM による数値解を図 2 に示す．塑性係数の減少に伴ない，波形は最大応力を初期降伏応力とする長方形パルスに近づく．これは塑性波の速度が弾性波速度 (2000 m/s) と比較して，非常に小さくなることに起因する．大きく伝播速度が異なる波の同時解析は数値的な不安定性を招きやすい．弾完全塑性 ($K = 0$) の場合には少し数値振動が目立つが，gv-ST/FEM はどの塑性係数でも安定した計算が実現できている．

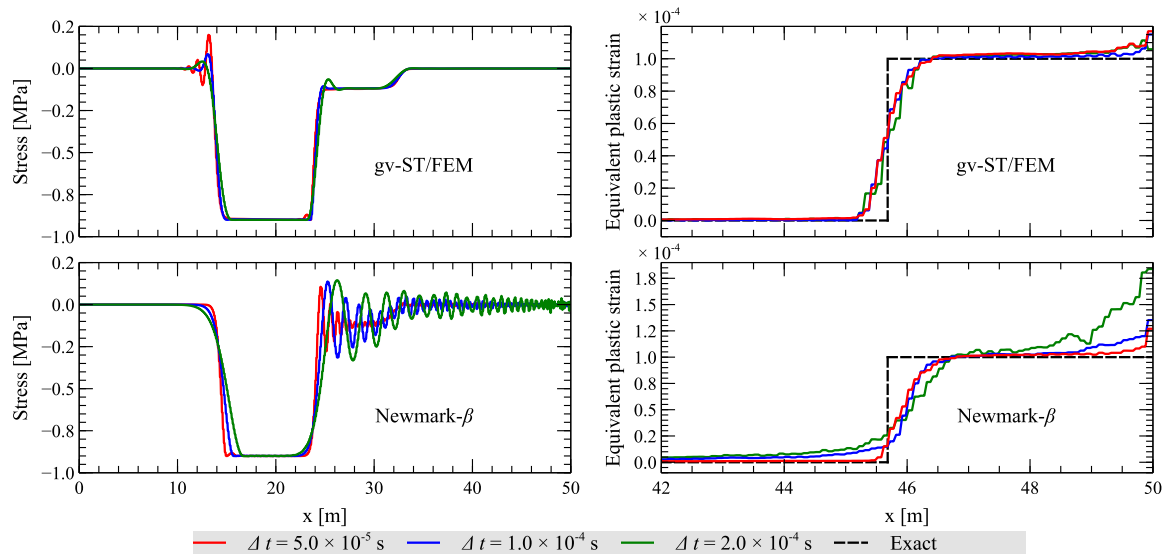


図 1 異なる Δt を用いた際の応力波 (右) と相当塑性ひずみ (左) の比較 ($K = 10 \text{ GPa}$, $t = 0.018 \text{ s}$)

Fig.1 Comparisons of stress and equivalent plastic strain with different Δt

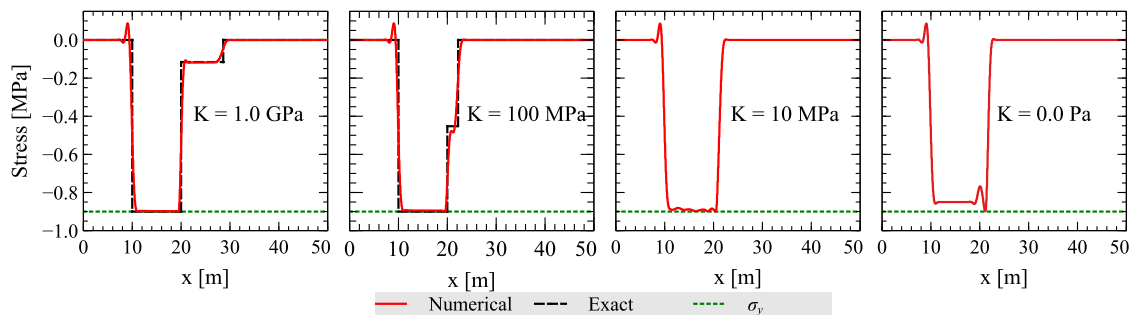


図 2 異なる塑性係数 K を設定した際の応力波の比較 ($t = 0.02 \text{ s}$)

Fig.2 Comparisons of stress with different plastic modulus K

参考文献: V. Sharma, K. Fujisawa and Y. Kuroda, Velocity-based space-time FEMs for solid dynamics problem: generalized framework for linear basis functions in time. *Comput. Mech.*, **74**:913-936, 2024.